1.18) $\frac{d^2y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0$, Dim = 2 (el espacio solución)

a) $b \neq a$, probar que $\{e^{ax}, e^{bx}\}$ es base de:

(I) $\frac{d^2y}{dx^2} - (a+b)\frac{dy}{dx} + ab\,y = 0$. →

Como se que el espacio solución tiene dim = 2 y el conj. $\{e^{ax}, e^{bx}\}$ tiene dim = 2 resta ver si el conj. es LI y por lo tanto base.

En el ej. 13a) demostré que $\{e^{2x}, e^{3x}\}$ es LI, por lo tanto, como $\{e^{ax}, e^{bx}\}$ tiene $a \neq b$, tiene la misma forma y también es LI.

Ahora veo si el conj. satisface la ecuación:

~~Tomo~~

Tomo $F(x) = \alpha_1 . e^{ax} + \alpha_2 . e^{bx}$

$F'(x) = a . \alpha_1 e^{ax} + b\alpha_2 e^{bx}$

$F''(x) = a^2 \alpha_1 e^{ax} + b^2 \alpha_2 e^{bx}$

Reemplazando en la ecuación:

$$(a^2\alpha_1 e^{ax} + b^2\alpha_2 e^{bx}) - (a+b) . (a\alpha_1 e^{ax} + b\alpha_2 e^{bx}) + ab . (\alpha_1 e^{ax} + \alpha_2 e^{bx}) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow (\cancel{a^2\alpha_1 e^{ax}} + \cancel{b^2\alpha_2 e^{bx}}) - (\cancel{a^2\alpha_1 e^{ax}} + ab\alpha_2 e^{bx} + ab\alpha_1 e^{ax} + \cancel{b^2\alpha_2 e^{bx}}) + ab\alpha_1 e^{ax} + ab\alpha_2 e^{bx} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow -ab\alpha_2 e^{bx} - ab\alpha_1 e^{ax} + ab\alpha_1 e^{ax} + ab\alpha_2 e^{bx} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 0 = 0 \checkmark$$

Entonces como $\{e^{ax}, e^{bx}\}$ es LI, satisface la ecuación y tiene la misma dimensión que el esp. solución $\rightarrow$ es base.

b) Ahora el conj. es $\{e^{ax}, xe^{ax}\}$ y la ec.:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2a\frac{dy}{dx} + a^2y = 0$$

como en el ej 136) demostré que $\{e^{3x}, xe^{3x}\}$ es LI, como $\{e^{ax}, xe^{ax}\}$ tiene la misma forma, también es LI.

Además tiene dim = 2, igual que la dim. del esp. solución.

Resta ver si el conj. satisface la ecuación.

Tomo $F(x) = \alpha_1 . (e^{ax}) + \alpha_2 . (xe^{ax}) = e^{ax}(\alpha_1 + \alpha_2 x)$

$F'(x) = \alpha_1 . a . e^{ax} + \alpha_2 . e^{ax} + \alpha_2 . x . a . e^{ax} = e^{ax}(\alpha_1 . a + \alpha_2 + \alpha_2 . ax)$

$F''(x) = \alpha_1 . a^2 e^{ax} + \alpha_2 . a . e^{ax} + \alpha_2 . a . e^{ax} + \alpha_2 . x . a^2 . e^{ax} = e^{ax}(\alpha_1 a^2 + \alpha_2 a + \alpha_2 a + \alpha_2 x a^2) \rightarrow$

$F''(x) = e^{ax}(\alpha_1 a^2 + 2\alpha_2 a + \alpha_2 x a^2)$

Reemplazando en la ecuación:

$$e^{ax}(\alpha_1 a^2 + 2\alpha_2 a + \alpha_2 x a^2) - 2a \cdot e^{ax}(\alpha_1 a + \alpha_2 + \alpha_2 a x) + a^2 e^{ax}(\alpha_1 + \alpha_2 x) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow e^{ax}(\alpha_1 a^2 + 2\alpha_2 a + \alpha_2 x a^2) - e^{ax}(2\alpha_1 a^2 + 2\alpha_2 a + 2\alpha_2 a^2 x) + e^{ax}(\alpha_1 a^2 + \alpha_2 a^2 x) = 0$$

$$\rightarrow e^{ax}(\alpha_1 a^2 + 2\alpha_2 a + \alpha_2 x a^2 - 2\alpha_1 a^2 - 2\alpha_2 a - 2\alpha_2 a^2 x + \alpha_1 a^2 + \alpha_2 a^2 x) = 0$$

$$\rightarrow e^{ax}(0) = 0 \rightarrow 0 = 0 \checkmark$$

Entonces como $\{e^{ax}; xe^{ax}\}$ es LI, satisface la ec. y tiene la misma dimensión que el esp. solución → es base.

c) Ahora el conj. es $\{e^{ax}\cos(bx), e^{ax}\operatorname{sen}(bx)\}$ y la ec.:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2a\frac{dy}{dx} + (a^2+b^2)y = 0.$$

En el ej 13d) demostré que $\{e^{3x}\cos(5x), e^{3x}\operatorname{sen}(5x)\}$ es LI.
Como $\{e^{ax}\cos(bx), e^{ax}\operatorname{sen}(bx)\}$ tiene la misma forma $(a \neq b)$, también es LI. Además tiene dim = 2, igual que el esp. solución. Resta ver si el conj. satisface la ecuación.

Tomo $F(x) = \alpha_1 . (e^{ax}\cos(bx)) + \alpha_2 . (e^{ax}\operatorname{sen}(bx)) = [e^{ax}(\alpha_1\cos(bx) + \alpha_2\operatorname{sen}(bx))]$

$$F'(x) = a . e^{ax}(\alpha_1\cos(bx) + \alpha_2 . \operatorname{sen}(bx)) + e^{ax}(-\alpha_1\operatorname{sen}(bx) . b + \alpha_2\cos(bx) b)$$

$$\rightarrow F'(x) = [e^{ax}(a\alpha_1\cos(bx) + a\alpha_2\operatorname{sen}(bx) - \alpha_1\operatorname{sen}(bx) b + \alpha_2\cos(bx) . b)]$$

$$F''(x) = ae^{ax}(a\alpha_1\cos(bx) + a\alpha_2\operatorname{sen}(bx) - \alpha_1\operatorname{sen}(bx) b + \alpha_2\cos(bx) b)$$ SIGUE

$$+ e^{ax}(-ab\alpha_1\operatorname{sen}(bx) + ab\alpha_2\cos(bx) - b^2\alpha_1\cos(bx) - b^2\alpha_2\operatorname{sen}(bx)) \rightarrow$$

$$\rightarrow F''(x) = e^{ax}(a^2\alpha_1\cos(bx) + a^2\alpha_2\operatorname{sen}(bx) - a\alpha_1\operatorname{sen}(bx) b + ab\alpha_2\cos(bx) - ab\alpha_1\operatorname{sen}(bx)$$ SIGUE

$$+ ab\alpha_2\cos(bx) - b^2\alpha_1\cos(bx) - b^2\alpha_2\operatorname{sen}(bx)) \rightarrow$$

$$\rightarrow F''(x) = [e^{ax}(a^2\alpha_1\cos(bx) + a^2\alpha_2\operatorname{sen}(bx) - 2ab\alpha_1\operatorname{sen}(bx) + 2ab\alpha_2\cos(bx) - b^2\alpha_1\cos(bx) - b^2\alpha_2\operatorname{sen}(bx))]$$

Reemplazo en la ecuación:

$$e^{ax}\cdot\left(a^2\alpha_1\cos(bx)+a^2\alpha_2\operatorname{sen}(bx)-2ab\alpha_1\operatorname{sen}(bx)+2ab\alpha_2\cos(bx)-b^2\alpha_1\cos(bx)-b^2\alpha_2\operatorname{sen}(bx)\right)$$ SIGUE

$$-e^{ax}\left(2a^2\alpha_1\cos(bx)+2a^2\alpha_2\operatorname{sen}(bx)-2ab\alpha_1\operatorname{sen}(bx)+2ab\alpha_2\cos(bx)\right)+e^{ax}\cdot\left(a^2\alpha_1\cos(bx)\right.$$ SIGUE

$$\left.+a^2\alpha_2\operatorname{sen}(bx)+b^2\alpha_1\cos(bx)+b^2\alpha_2\operatorname{sen}(bx)\right)=0 \rightarrow$$

$$\rightarrow e^{ax}\cdot(0)=0 \rightarrow 0=0 \checkmark$$

Entonces como $\{e^{ax}\cos(bx), e^{ax}\operatorname{sen}(bx)\}$ es LI, satisface la ec. y tiene la misma dim. que el esp. solución -> es base.